Activités préparatoires 2017 - Algèbre (Partie 1)

Anne Lacroix

Table des matières

Equations du premier degré

Une *équation du premier degré* en l'inconnue (réelle) x est une équation du type

$$ax + b = 0$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Résolution

$ax + b = 0$

$\Leftrightarrow ax = -b$ *soustraire b aux 2 membres*

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a}$ *diviser les 2 membres par a*

Equations du second degré

Une *équation du second degré* en l'inconnue (réelle) x est une équation du type

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Résolution

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow ax^2 + bx = -c \\ &\Leftrightarrow ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = \frac{b^2}{4a} - c \\ &\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \\ &\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \end{aligned}$$

Equations du second degré

On obtient donc

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Posons $\rho = b^2 - 4ac$

On a **3 cas possibles** :

1. $\rho < 0$
   donc on a $(2ax + b)^2 < 0$
   $\Rightarrow$ pas de solution (réelle)

2. $\rho = 0$
   donc on a

$$\begin{aligned} (2ax + b)^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2ax + b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -b/2a. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ une seule solution

Equations du second degré

On obtient donc

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Posons $\rho = b^2 - 4ac$

On a **3 cas possibles** :

3. $\rho > 0$
   donc on a

$$\begin{aligned}(2ax + b)^2 = \rho \quad & \Leftrightarrow \quad 2ax + b = \sqrt{\rho} \text{ ou } 2ax + b = -\sqrt{\rho} \\ & \Leftrightarrow \quad 2ax = -b + \sqrt{\rho} \text{ ou } 2ax = -b - \sqrt{\rho} \\ & \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b + \sqrt{\rho}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\rho}}{2a}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 2 solutions

Equations du second degré

Méthode

- Calculer $\rho = b^2 - 4ac$
- Considérer le signe de ρ
  1. si $\rho < 0$: pas de solution (réelle)
  2. si $\rho = 0$: $x = -b/2a$
  3. si $\rho > 0$: $x = \dfrac{-b + \sqrt{\rho}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b - \sqrt{\rho}}{2a}$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

Equations de degré supérieur à 2

Rappel Soient P et Q deux polynômes, on a

$$P(x).Q(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) = 0 \text{ ou } Q(x) = 0.$$

Exemple

$$(3x + 1)(x - 2) = 0$$

On va donc factoriser pour utiliser cette propriété

Equations de degré supérieur à 2

Rappels utiles pour la factorisation

Produits remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Equations de degré supérieur à 2

Rappels utiles pour la factorisation

Méthode de Horner

But : Mettre en évidence un facteur du type $x - a$

Méthode

1. chercher une racine évidente a et la placer dans la case de gauche
2. reporter les coefficients du polynôme sur la 1ère ligne, dans l'ordre des exposants décroissants
3. "descendre" le 1er coefficient sur la dernière ligne
4. répéter jusqu'à arriver à la dernière case les opérations suivantes :
   - multiplier le nombre de la dernière ligne par a et placer le résultat sur la case située à droite sur la 2ème ligne
   - additionner les cases de la 1ère ligne et 2ème ligne pour obtenir le nombre de la dernière ligne
5. les nombres de la dernière ligne donnent les coefficients du facteur d'un degré inférieur au polynôme de départ

Exemple

Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

Equations de degré supérieur à 2

Rappels utiles pour la factorisation

Factorisation d'un polynôme du second degré

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

où x_1 et x_2 sont les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$

Exemple

Factoriser le polynôme

$$2x^2 - 3x - 2.$$

Equations de degré supérieur à 2

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante.

$$6x^3 - 10x^2 = 4x - 4$$

La valeur absolue

Définition

La valeur absolue (ou le module) d'un réel est le nombre lui-même s'il est positif et son opposé s'il est négatif.
Autrement dit, si on désigne par $|x|$ la valeur absolue du réel x, on a

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Exemple

$|2| = 2$ et $|-2| = 2$

La valeur absolue

1. La valeur absolue d'un réel est toujours un réel positif.

$$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. La valeur absolue d'un réel est nulle si et seulement si ce réel est nul.

$$|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

3. Deux réels ont même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = y \ \text{ ou } \ x = -y$$

4. Pour tous réels a et b on a

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \text{et} \quad a^2 = |a|^2$$

$$|a.b| = |a|.|b| \quad \text{mais} \quad |a+b| \leq |a| + |b|$$

5. Soit r un réel POSITIF et x un réel, on a

$$|x| \leq r \quad \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$$

$$|x| \geq r \quad \Leftrightarrow x \geq r \text{ ou } x \leq -r$$

La valeur absolue

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $|2x^2 + 4| = |x - 5|$
2. $|5x + 1| \leq 4$
3. $|2x + 1| + 2 = 0$
4. $|2x + 1| - 2 = 0$
5. $|2x + 1| - 2x = 0$